ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ ИНФОРМАЦИЈЕ III
Од маја до јуна 2021.

Растко Вуковић
Економски институт Бања Лука (на чекању)
јуни 2021.

Растко Вуковић:
Прилози теорији информације III – Од маја до јуна 2021.
(Економски институт Бања Лука, на чекању, 2021)
https://archive.org/details/prilozi-iii/

First English translation:

Rastko Vuković:
Notes to Information Theory III – From May to June 2021.
(Economic Institute Banja Luka, on hold, 2021)
https://www.scribd.com/document/507766050/Notes-III

Предговор

Када бих требао само једном реченицом поентирати „теорију информације“ можда би то било могуће познатом изјавом Бертолда Брехта: „Ако се бориш можеш изгубити, а ако се не бориш већ си изгубио.“ Она кроз величину непознатог и моћ неизвесности изражава страхове и једноставност нашег функционисања, али погађа и суштину „информатичког универзума“.

Међутим, много важног остало би недоречено. Информација је суптилна појава чија је реалност повремено недоступна експерименту, а опет се зна појавити у снажном физичком дејству. Она не може настати из ничега нити у ништа нестати, њену енергију трајање разводњава а импулс разлаже простор, па мој циљ превазилази класичну материју. Немам пред собом само материјалну појаву, већ и просторно-временску. У апстрахованом смислу када је развучена на „свугде“ и „увек“, додатно, верујем да „информацији“ припадају и логичке категорије.

То је та скоро немогућа мисија коју покушавам да остварим кроз овај серијал „Прилога“. Не знам да ли ми је дато, али покушаћу још једном да у таквој информацији спајам физички са интелектуалним аспектом. Оба са виталним из поклича Жан Жака Русоа: „дража ми је слобода у опасности од спокоја у ропству“, да спојим снагу, неизвесност и живот са количином опција.

Аутор, маја 2021.

Садржај

Предговор ... 3
1. Питања и одговори ... 7
2. Унутрашња информација ... 12
3. Интерференција ... 17
4. Лукавост ... 23
5. Псеудоистина ... 26
6. О имагинарном свету ... 30
7. Брзина светлости ... 34
8. Развојност ... 41
Литература ... 47

1. Питања и одговори

која се тичу теорије информације

Растко Вуковић[1], 10. мај 2021.

Овим различитим питањима и одговорима желим скренути пажњу на ширину проблема са којима се теорија информације треба сретати.

Питање: Имаш ли неки доказ[2] да „спонтани раст ентропије“ не важи за простор, већ само за супстанцу? Да ли је уопште могуће наћи неки такав доказ? Може ли се то објаснити и разумети?

Одговор: Да је доказе лако налазити људи би давно владали свемиром, толико је њихово тражењење важан и тежак посао, срећом за разлику од њиховог разумевања. Ево једног.

У Гибсовом парадоксу[3] посматра се ентропија посуде са флуидом (гасом или течношћу) преградом раздвојена на два дела. Уклањањем преграде молекуле делова се неповратно мешају и ентропија смесе расте. То је процес преласка топлоте из средине више ка околини ниже температуре другог закона термодинамике. Претходна ситуација се неће спонтано вратити – осим у једном случају.

Тај посебан случај биле би „молекуле“ које се не разликују. Када би постојале такве молекуле флуида које су неразличиве у толикој мери да не постоји никакав закон у природи по којем би се једна могла разликовати од друге, онда након уклањања преграде не би дошло до „мешања“, не би порасла ентропија, те се враћањем преграде назад ентропија не би требала смањивати. На њих не би деловао закон „спонтаног раста ентропије“.

Гибс је о таквом нестварном гасу маштао (1875) не надајући се да би се такав икада могао у физици открити и зато његов опис замишљеног експеримента сматрамо само парадоксом, а не рецимо контрадикцијом опште ентропије.

Међутим, током 20. века је квантна механика окрила бозоне, елементарне честице које заиста није могуће разликовати. Супротно њима, фермиони би били елементарне честице које се две исте не могу наћи у истом квантном стању попут атома, јер то забрањује Паулијев принцип искључења. Фермиони су честице на које делују поља сила, за разлику од бозона, честица које дефинишу та поља и који исти могу вишеструко налазити у истом стању.

Бозони према фермионима понашају се попут могућности пре реализације случајног догађаја (две у случају бацања новчића, шест код бацања коцке) наспрам исхода након („писмо“ или „глава“ код новчића, односно један од шест бројева 1-6 коцке). Али оно што је нама овде занимљивије је

---

[1] Гимназија Бања Лука, проф. математике
[2] Питање ми рецимо анонимног колеге.
[3] [3], Гибсов парадокс I и II

однос бозона према фермионима као простора према супстанци. То је разлог за генералисање ових појмова, да бозоне називамо „простором“ а фермионе „супстанцом“.

У случају примене Гибсовог мисаоног експеримента на бозоне, не би се десио спонтани раст ентропије уклањањем преграде, па можемо узети да спонтани раст ентропије не важи за „простор“. Али тада закони одржања намећу своје услове. Како ентропија „свега“ стално спонтано расте, а због принципа минимализма, информација опада, онда закон одржања информације намеће закључак да информација из супстанце прелази у простор непромењене количине.

П: Информација из фермиона одлази у бозоне?

О: Да, информација ,,супстанце'' топи се и ,,простор'' расте. Овај прелаз информације са супстанце у простор називао сам једном приликом „меморисањем“ у простору, а објашњење је стигло са једне сасвим другачије стране. Тачне теорије то могу. Оне иначе долазе до истих ставова са наизглед неповезаних страна.

П: Ок, следеће ме још интересује. Има ли то везе са „информацијом перцепције“ и, ако да, како?

О: Информација перцепције, $S = ax + by + cz + \cdots$, је производ низова рецимо првог $(a, b, c, \dots)$ који представља способности и другог $(x, y, z, \dots)$ који представља одговарајућа ограничења. У случају бројева, због комутативности множења, ова два низа могу бити репрезентације опонената чије су способности једног ограничења за другог и обрнуто.

Међутим, низови су врсте вектора, као и линеарни оператори, па је логична и интерпретација са операторима $a, b, c, \dots$ који делују на одговарајуће векторе $x, y, z, \dots$ са збиром S који представља „информацију перцепције“. Приметимо да је ова генерализација сасвим у реду са становишта савремене квантне физике при интерпретацији оператора као „квантних еволуција“. Посебни случајеви ових еволуција биле би транслације супстанце у простору и времену.

Не кажем да је ово лако разумети на свакодневни интуитивни начин, али тврдим да је немогуће логички оспорити, јер се ради о једноставним репрезентацијама линеарне алгебре.

***

Питање: Колико је „неизвесност“ неизвесна у „теорији информације“?

Одговор: Објаснићу на примеру. Ловац лови дивљач триком. Колико је његово лукавство неизвесност за плен утолико његов улов може бити извеснији. Као у народној пословици „ум царује а снага кладе ваља“, у тој суптилној разлици ловца и ловине налази се „објективна неизвесност“ која чини дејство.

Ова неизвесност се мери ,,информацијом перцепције“ ($S = HI$ − производ хијерархије и интелигенције). У датом случају то ($S = ax + by + cz + \cdots$) је производ разлика ограничења $H(a, b, c, \dots)$ и способности $I(x, y, z, \dots)$ ловца у односу на плен и у том смислу величина S је „објективна“ за жртву.

У мојој „теорији информације“ информација перцепције (S) је дуализам два фактора, рецимо субјективног и објективног (условно речено, јер вектори H и I могу означавати како два субјекта тако и два објекта), па је појам „неизвесности“ који је иначе суштина „информације“ – релативан.

- Да ли је могућа апсолутна неизвесност?

- Ако сам добро разумео, та „апсолутна неизвесност“ била би нека неизвесност у односу на било којег могућег представника универзума, икада. Међутим, Геделова теорема немогућности то не дозвољава. Не постоји таква ,,теорија свих теорија'' из које би се могле сагледати било све истине, или неистине, свеједно. Према тој теореми „могућности“ и „немогућности“ увек су релативне.

***

Питање: Важи ли да „једнакост генерише сукобе“' и када се користи само Шенонова дефиниција информације?

Одговор: Да. То је добро питање. Оно је прилика да приметимо разлику између „једнакости једнаких“ и „једнакости различитих“, иначе нових појмова које класична теорија информације нема. У прве би на пример могле спадати неизвесности пре исхода теорије вероватноће, честице простора квантне физике, или лица исте националности друштва, док би друге могле бити реализације случајног догађаја, честице супстанце, или битно различите групе унутар неког ширег истог друштва.

Шенонова формула информације (средња вредност различитих логаритама бројева група једнако вероватних исхода, 1948) не подржава закон одржања информације. Са њеном корекцијом коју сам назвао „физичком информацијом“ у истоименој књизи[4], за коју тај закон важи, или другом аналогном, неизвесности пре исхода постају врста информације.

Са уважавањем закона одржања информације број могућности, на пример, пре бацања фер коцке, садржи тачно једнаку количину информације (неизвесности) као било који поједини исход након. Могућности не сметају једна другој и повећавају информацију исхода (логаритам њиховог броја – по Хартлију, 1928), па са принципом минимализма информације[5] (природа тежи мањој емисији информације, као што тежи вероватнијим исходима) долазимо до истог, да природа не воли једнакост. Подсећам, у теорији информације о којој говоримо информација је свеприсутна.

П: Помињеш и физикално објашњење поред овог из чисте теорије вероватноће. Какво је оно?

О: Рецимо термодинамичко. Тај моменат постји у Гибсовом парадоксу – када у његовој посуди са преградом замишљамо „гас бозона“ – толико једако вероватних честица да након уклањања преграде не расте ентропија и не смањује се информација. У свим другим случајевима, мешањем молекула гаса ентропија расте неповратним процесом. Међутим, у случају бозона и рецимо

[4] [5]
[5] [4]

честица „простора“, као и у стањима могућности пре исхода, не важи Паулијев принцип искључивости (два иста електрона не могу бити у истом атому).

Објашњавао сам и сада скраћено понављам, спонтани раст ентропије закон је само за супстанцу (не и за простор). Временом се супстанца универзума топи, а простор расте. Простор расте зато што преузима све више информације од супстанце, а сада метафорички можемо рећи и да се шири због нетрпељивости истих са једне стране, а са друге због начелног минимализма емисије информације. Нетрпељивост бозона мања је од нетрпељивости фермиона на начин да је вероватноћа преласка бозона у фермионе мања од обрнутог, преласка фермиона у бозоне. Већ и због тога супстанца се разређује у простору.

П: Некако ти та објашњења нису баш у духу савремене физике?

О: Сматраћу то комплиментом (за оригиналност), али заправо је „теорија информације“ шира од физике, па и математике. Њена методологија биће у духу неке будуће науке, верујем.

***

Питање: Еманципација[6] (полова) је пролазни тренд?

Одговор: Не, напротив, она је трајно стање. Уопште мушки пол је (у порсеку мало) склонији ризику да би се повећале шансе врсте да траје, обзиром на природне непредвидљивости. Крупне ненадане промене дешавају се пре или касније и врсте које су превише рутиниране у тим приликама отпадају са листе преживелих. Ако то разумемо, онда је лако објаснити смисао постојања мушког пола код сложених врста, или бар оних које живе у сложеним (мање предвидљивим) условима.

Отуда и смисао еманципације, уопште, као приближавања провереним а дотад ризичним облицима понашања. Посебно је и еманципација жена током последњих деценија део истог обрасца. Оне у просеку преузимају више претходно „мушких“ облика понашања, него обрнуто.

Новац и економска моћ су типични примери. Нема профита без ризика, рекли бисмо, чиме откривамо да је стицање богатства био неизвестан подухват историје (еволуције). Оно га тако чини „мушким“ истрчавањем у непознато и опасно. При томе приметимо да нема ризика без пропасти, без стварне беде због неуспеха, о чему сведочи већи број мушкараца пропалица и већи проценат њих робијаша очајника које тако препознајемо као отпаднике и губитнике.

П: Па тиме браниш криминалце?

О: Нити их браним нити нападам (осуђивати их сматра се „нормалним“), него их само тумачим.

П: Да ли је то нека нова прича?

О: То је моја стара прича, али новина за остале.

[6] Чак и оваква питања тичу се теорије информације.

***

Питање: Вероватнији догађаји догађају се чешће и садашњост постаје све мање неизвесна?

Одговор: Да. Еквивалентно је рећи да садашњост постаје све мање информативна, јер физички процеси еволуирају ка мање информативним (принцип минимализма информације). Такође, ентропија васионе се повећава што, према теорији информације (мојој, не и према класичној термодинамици) значи да она емитује све мање информације и у том смислу редукује се њена неизвесност.

П: Где одлази та информација, ако кажеш да важи закон одржања информације?

О: Прелази из супстанце у простор[7]. Супстанце космоса је све мање, а простора све више. Вероватноћа емисије честица простора у неки облик честица супстанце (бозона у фермионе) мања је од обрнуте (фермиона у бозоне) и у том смислу информатички капацитет васионе бледи. Оно што је некада било ствар случаја у будућности постаје извесност, рецимо као да каузалних закона има све више. Међутим, тај процес веома је спор и корацима у милијардама година постаје све спорији.

П: То каже „теорија информације“?

О: Тако је, а то је још увек само једна од хипотетичких теорија каквих не недостаје у данашњој науци.

---

[7] Колеге које ми постављају питања често нису обавештени о мојим претходним радовима.

2. Унутрашња информација

15. мај 2021.

Може ли информација повремено бити физички сакривена, а да се на њу и даље односи закон одржања, антагонизам једнаких, принципијелан минимализам и слично што иначе сматрамо њеним својствима? Овај прилог иде у правцу позитивног одговора на оваква питања.

Увод

Питање: Како да објашњавам „антагонизам једнаких“?

Одговор: Други пут изговорена „вест“ није више вест. То је суштина „информатичког универзума“, да нема информације без неизвесности. Затим, због закона одржања информације, нема таквог универзума без сталних промена, па онда ни без различитости, многострукости (о којима сам детаљно писао раније).

Након тога долази закључак да су једнако вероватни догађаји најинформативнији. На пример, када знаш да је коцка фелерична и да њеним бацањем најчешће пада „шестица“, па она и падне, то онда и није толико велика вест као када падне „шестица“ у случају фер коцке.

Након свега можеш наводити примере, попут: „на такмичењу равноправних у почетним позицијама, у наставку се очекује жешћи ниво игре“. Примети, тада се очекује већа неизвесност и информација игре, а отуда и живахност.

Обрнути редослед објашњења (такмичење –> вероватноћа –> непоновљивост) био би нематематички, јер експеримент не може доказати или оспорити логичку истину.

Честице простора

Класична механика увек разликује честице. То јој намећу непосредна опажања и мерења попут бацања два фер новчића (или једног новчића два пута) са скупом исхода, парова {ПП, ПГ, ГП, ГГ}, за које се испоставља да су једнако вероватни. Наиме, када се такав опит понавља много пута показује се да се сваки од четири пара појављује са истом учесталошћу. Тако се редослед ПГ (писмо-глава) појављује у око четвртини свих опита, као и редослед ГП (глава-писмо), ма како ми сматрали новчиће једнаким, уместо да ПГ и ГП имају збирно око трећине свих исхода.

Молекуле се такође разликују. Гасови две суседне собе мешаће се након отварања врата и ентропија две просторије спонтано ће расти[8]. То је неповратан процес због којег топлота одлази у хладнију околину (други закон термодинамике) и настају више уједначена (аморфна) стања молекула која емитују мање информације.

Порастом ентропије смањује се емисија информације па би у случају неразличивих (идентичних) честица „гаса“, какве су „честице простора“ (можда бозони), та емисија информације била

[8] [3], Гибсов парадокс I и II

минимална. Зато их називам „честицама простора“, јер сваке две класичне честице разликују се бар по још нечему, поред положаја или тренутка, осим „честица“ којима су положаји или тренутци постојања главна (једина) својства.

Налик „честицама простора“ су стања опита пре исхода. Код бацања коцке то су могућности да падне један од бројева 1-6, које садрже тачно онолико информације колико би имао сваки од појединих исхода.

Антисиметрија

Вратимо се опет на бацање два новчића. Како исход писмо-глава није исто што глава-писмо то додељивањем вредности овим стањима не треба разлику $PG - GP$ учинити нултом. Међутим, како год их вредновали биће $PG - GP = -(GP - PG)$. Уопште, заменом места променљивих x и y које означавају положаје, функција $f(x,y)$ мења знак, а $f(x,y) = 0$ акко[9] $x = y$.

Са три променљиве x, y и z положаја, заменом суседних добијамо:

$$f(x,y,z) = -f(y,x,z) = f(y,z,x) = -f(z,y,x).$$

Заменом прве и треће вредности такође се мења предзнак ове функције, па и

$$f\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

а то је особина фермиона. Наводне честице супстанце понашају се као исходи бацања новчића.

На сличан начин закључујемо да би за „честице простора“, тачније речено за бозоне, важило

$$b\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = b(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Где су парови x_i и x_j на местима $i, j = 1,2, \dots, n$ функције. Тада $x_i = x_j$ не повлачи $b = 0$.

Ова својства, антисиметрије за фермионе, а симетрије за бозоне, говоре о узајамној нетрпељивости првих и о (суштинском) неразликовању других. За фермионе важи Паулијев принцип искључења, да два иста не могу бити у истом квантном стању (два иста електрона не могу бити у истом атому), док два бозона то могу.

Комутатори

Подсјетимо се како на апсцси x на таласну функцију $\psi = \psi(x,t)$ делује оператор положаја $\hat{x}$: $\psi \to x\psi$. То је линеарна фукција $\hat{x}(\psi) = x\psi$ па краће пишемо $\hat{x}\psi = x\psi$. Као што знамо из квантне механике, за комутатор овог оператора и оператора импулса $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ важи:

$$[\hat{x},\hat{p}]\psi = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi = \hat{x}\hat{p}\psi - \hat{p}\hat{x}\psi = -xi\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi + i\hbar\psi + xi\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = i\hbar\psi$$

[9] акко – ако и само ако

где је i имагинарна јединица ($i^2 = -1$), а отуда релације неодређености положаја и импулса

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{1}$$

У квантној механици овако дефинишемо и канонске релације комутације које важе и када је једна од величина (овде положај или импулс честице) Фуријеова трансформација друге.

Нама је битно да (1) одређује квант дејства, редуковану планкову Планкову константу $\hbar = h/2\pi$, јер је дејство еквивалент информацији.

У теорији много-честица и посебно у квантној хемији користимо лествичне операторе[10], подизања $\hat{a}^+$ и супштања $\hat{a}^-$ (негде ознаке $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$), односно креације и анхилације. Они повећавају или смањују за једну број честица система, а најчешће се користе за стања електрона. Иначе, они су оператори који повећавају или смањују сопствене вредности других оператора.

На пример, нека је $\hat{X}\vec{x} = x\vec{x}$, што значи да је број x сопствена (својствена, карактеристична) вредност линеарног оператора $\hat{X}$ придружена сопственом вектору $\vec{x}$ тог оператора. При томе, нека је $\hat{Y}$ линеарни оператор који је са комутатором $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$ у релацији $[\hat{X}, \hat{Y}] = y\hat{Y}$, са неким бројем y. Тада је:

$$\hat{X}\hat{Y}\vec{x} = (\hat{Y}\hat{X} + [\hat{X}, \hat{Y}])\vec{x} = (x + y)\hat{Y}\vec{x}$$

а отуда

$$\hat{X}\vec{y} = (x + y)\vec{y}, \tag{2}$$

где је вектор $\vec{y} = \hat{Y}\vec{x}$. Сопствена вредност (x) првог оператора ($\hat{X}$) увећана за y припада новом сопственом вектору ($\vec{y}$), а лествични оператор конструисан је помоћу комутатора.

Други пример су лествични оператори[11] конструисани помоћу Паулијевих матрица:

$$[\hat{S}_z, \hat{S}^+] = \hat{S}^+, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}^-] = -\hat{S}^-, \tag{3}$$

где оператори подизања ($\hat{S}^+$) и спуштања ($\hat{S}^-$) спина нису хермитски.

У наставку[12], помоћу Хамилтонијана добијамо мало општије операторе подизања и спуштања:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \tag{4}$$

помоћу горе поменутих оператора положаја и импулса. Овде је $i^2 = -1$. За разлику од оператора $\hat{x}$ и $\hat{p}$ ови лествични оператори (креације $\hat{a}^+$ и анхилације $\hat{a}^-$) такође, као ни (3), нису хермитски и као такви не представљају обзервабле (физички мерљиве величине) класичне квантне физике, али у ширем смислу, у мојој „теорији информације“, оне јесу „информације“, односно „дејства“.

---

[10] [3], 2.6.5 Лествични оператори
[11] [3], (2.166)
[12] [3], (2.167)

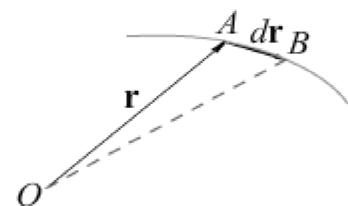
Да се не бисмо бавили само наводним теоријама, узмимо да имамо скуп лествичних оператора[13] креације $\{\hat{a}_k^\dagger\}$ означених неким дискретним индексом $k = 1,2,\dots,n$. Слово $\hat{a}$ користи се у том прилогу за операторе честица који могу бити или бозонски или фермионски. Посуђујући терминологију из квантне оптике, аутор ознаке k назива модовима. Физички, ови модови могу представљати било који степен слободе честица, попут поларизације, таласног вектора или времена доласка на детектор, за фотоне, спин или импулс, за електрон, и тако даље. Они би априори могли бити дискретни или континуирани, али у наставку претпостављају се дискретни.

Затим се доказује:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{kj}\ ,\ \ [\hat{a}_k, \hat{a}_j] = [\hat{a}_k^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \tag{5}$$

за сва карактеристична понашања бозона и фермиона. Уз објашњења овог аутора (Daniel Jost Brod) приметимо само да се ови комутатори (5), као и оператор подизања ($\hat{a}_j^\dagger$), додатно могу разумети као „дејства“, односно „информације“.

Сличан закључак налазимо на сасвим другој страни, анализом Кеплеровог другог закона. На слици лево скицирана је путања небеског тела $A \to B$ око Сунца O, чији радијус вектор $\mathbf{r}$ пребрише једнаке површине за једнака времена. Али, површина инфинитезималног троугла ABO еквивалентна је комутатору[14], те стога и информацији. Планета и сунце у комуникацији су сразмерној овој површини, а она је, по принципу најмањег дејства и принципу минимализма информације, најмања могућа. Као што се види из тог прилога, ови су закључци општи. Они важе за све константне централне силе, било да су нулте, привлачне или одбојне.



Коначно имамо и интерпретацију комутатора у множењу комплексних бројева[15]. Нека је $\omega \in \Omega$ случајни догађај из неког потпуног скупа догађаја (Ω) који могу бити перципрани. Нека је $A = A_x + iA_y \in \mathbb{C}$ комплексан број ($A_x, A_y \in \mathbb{R}$) који рецимо представља способност, у пару са комплексним бројем $B = B_x + iB_y$ који представља ограничење, $A = A(\omega)$ и $B = B(\omega)$.

Производ коњугованог првог са другим од ових бројева је

$$A^*B = A \cdot B + i[A, B], \tag{6}$$

где су $A \cdot B = A_xB_x + A_yB_y$ и $[A, B] = A_xB_y - A_yB_x$ оба реални бројеви. Овај други је комутатор који нтерпретирамо неком „унутрашњом информацијом“ спреге способности и ограничења датог догађаја ω.

[13] [6]
[14] [2], 3. Потенцијал информације
[15] [1], 22. Ротације

Закључак

Бозони и фермиони, као и честице простора и супстанце, односно стања случајног догађаја пре и након реализације, носиоци су информације. За разлику од увреженог схватања квантне физике, овде те информације видимо као као нешто што није увек обзервабилно, већ се таквим појављује на махове.

3. Интерференција

19. мај 2021.

Ово је прилог додатним димензијама времена, иначе карактеристичним за теорију информације коју развијам, а о којима сам писао више пута на другачије начине. Сада је акценат на интерференцији таласа који би могли да не припадају истој реалности.

Увод

Питања: Како то мислиш „скривена информација“[16]? Да ли је то информација која може да изађе из „физичког света“ и да се тамо настави понашати на начине нормалне информације, а да се онда може опет појавити у нашој реалности?

Одговори: Тако некако. Закон одржања наставља да важи и тамо и овамо, за информацију која повремено постаје физичка. Такође важи и принципијелни минимализам комуникације (дејства) и тзв. антагонизам једнакости. То су последице рачуна, математике комплексних бројева коју користимо у опсивању рецимо интерференције таласа-честица квантне механике.

Те таласне функције су комплексни бројеви, интерференције су њихови збирови. Када бележимо стизање таласа експериментом двоструки прорез, чак и када пропуштамо једну по једну честицу (фотон, електрон и слично), без обзира на трајање док их нема, оне интерферирају. То показује алгебра, сабирање комплексних бројева, а тачно то се опажа у експерименту.

Оно што нас збуњује тада је питање како једна једина честица може интерферирати сама са собом попут таласа, а одговор који нудим је да тада интерферирају њене суперпозиције, сва стања, односно све могућности које она има на свом путу до мерења. Тим мерењем, честица-талас испоручи своју информацију мерној апаратури и утолико остаје без неизвесности, тј. без претходних суперпозиција. А то је тачно оно што показује сабирање комплексних бројева, таласних функција.

Способност тих имагинарних путања (суперпозиција) да интерферирају и да се резултат покаже као фактичко стање на застору, екрану на крају пута, доказ је њихове реалности. Бар ја тако мислим.

Таласна функција

Пођимо од формуле (6) претходног прилога

$$A^*B = A \cdot B + i[A, B], \tag{1}$$

где су $A = A_1 + iA_2$ и $B = B_1 + iB_2$ комплексни бројеви ($i^2 = -1$). Они би могли представљати редом „способност“ и „ограничење“ неке честице наспрам околине, а производ A^*B „информацију перцепције“ дате ситуације. Даље добијамо:

[16] 2. Унутрашња информација

$$(A_1 - iA_2)(B_1 + iB_2) = (A_1B_1 + A_2B_2) + i(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$= A_0B_0[(\cos\omega t \cos kx + \sin\omega t \sin kx) + i(\cos\omega t \sin kx - \sin\omega t \cos kx)]$$

са новим ознакама $A_1 = A_0 \cos\omega t$, $A_2 = A_0 \sin\omega t$, $B_1 = B_0 \cos kx$ и $B_2 = B_0 \sin kx$. Отуда

$$A^*B = A_0B_0e^{i(kx-\omega t)}, \tag{2}$$

где производ $A_0B_0 \in \mathbb{R}$ може представљати амплитуду таласне функције $\psi(x,t) = A^*B$.

У случају када је A_0B_0 константа, број независан од апсцисе x и тренутка t, онда (2) представља таласну фукцију слободне-честице. То знамо из квантне механике и лако се проверава.

Знамо да временски зависна Шредингерова једначина апсцисе има облик

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \tag{3}$$

где је $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}05457 \times 10^{-34}$ Js Планкова редукована константа (квант дејства), m маса честице, а $U(x)$ потенцијал. Иначе овај потенцијал дефинише граничне услове (енергије које честицу држе у границама) просторног интервала тако да се једначина (3) може раздвојити на две једначине, временски независну Шредингерову једначину и временску еволуцију:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad H\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi, \tag{4}$$

где је H хамилтонијан, односно укупна енергија честице. За слободну честицу је $U(x) = 0$ за све x и лако је проверити да (2) тада решава (3).

Обрнуто, претпоставимо да је најопштији облик таласне функције

$$\psi = Ce^{ax}e^{bt}, \tag{5}$$

за слободну честицу, $U(x) = 0$, где су C, a и b неке непознате константе. Уврштавајући у (4) налазимо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}a^2\psi = E\psi, \quad E\psi = i\hbar b\psi,$$

$$a^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}, \quad b = -i\frac{E}{\hbar},$$

а како је $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ то је $a = i\frac{p}{\hbar} = i\frac{2\pi}{\lambda}$, где је λ таласна дужина честице-таласа. Импулс је $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k$, где је $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ тзв. таласни број. Са друге стране, знамо да је производ Планкове константе ($h \approx 6{,}62607 \times 10^{-34}$ J·Hz^{-1}) и фреквенције (ν) енергија $E = h\nu = \hbar\omega$, па је $b = -i\omega$, где је $\omega = 2\pi\nu$ тзв. угаона фреквенција. Уврштавањем ових $a = ik$ и $b = -i\omega$ добијамо (2), при чему је константа $C = A_0B_0$.

Ови резултати доказују везу добро познатог облика (5) таласне функције са њеним не тако познатим обликом (1) и отварају питања интерпретације те везе. Информатичко објашњење, доследно претходном прилогу и (мојој) теорији информације уопште, било би да (1) значи повремене, периодичне одласке информације честице у „имагинарно простор-време“ где она и даље задржава своја главна својства из реалног света.

Збир

Занимљиво је математичко својство производа (1) да може представљати таласну функцију, а потом да се том истом (формом) таласном функцијом може интерпретирати сваки од фактора датог производа. То сматам још једном потврдом „теорије информације“, јер и свако саопштење о информацији нека је информација.

Видећемо да информација као онтолошка новина у физици има значајне последице. За почетак размотримо збир, односно интерференцију два таласна вектора:

$$A = A_0 e^{i\alpha}, \quad B = B_0 e^{i\beta}. \tag{6}$$

Нека је $A_0^2 = A_1^2 + A_2^2$ и $B_0^2 = B_1^2 + B_2^2$, сагласно претходним, а α и β нека су одговарајуће информације (облика $kx - \omega t$, што је такође информација перцепције[17]) честица-таласа које функције (6) представљају.

Посебно је занимљив случај када A и B не припадају истој реалности:

$$A + iB = A_0 e^{i\alpha} + iB_0 e^{i\beta} =$$

$$= A_0(\cos\alpha + i\sin\alpha) + iB_0(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= (A_0\cos\alpha - B_0\sin\beta) + i(A_0\sin\alpha + B_0\cos\beta)$$

$$= \sqrt{A_0^2 + B_0^2}\left[\left(\frac{A_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}\cos\alpha - \frac{B_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}\sin\beta\right) + i\left(\frac{A_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}\sin\alpha + \frac{B_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}\cos\beta\right)\right]$$

$$A + iB = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}[(\cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha) + i(\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta)], \tag{7}$$

где је $\frac{A_0}{\sqrt{A_0^2+B_0^2}} = \cos\gamma$, па је $\frac{B_0}{\sqrt{A_0^2+B_0^2}} = \sin\gamma$ за неки угао γ. Наиме, збир квадрата косинуса и синуса истог угла је један, а то је овде случај.

Збир (7) представљаће таласну функцију облика (5) када је

$$A + iB = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}(\cos\gamma + i\sin\gamma), \tag{8}$$

а то ће бити ако постоји такав угао γ да је:

---

[17] [8], формула (1.103

$$\begin{cases}\cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha = \cos\gamma \\ \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta = \sin\gamma\end{cases} \quad (9)$$

дакле када је $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$. Квадрирањем овог косинуса и синуса, па сабирањем и изједначавањем са јединицом, долазимо до једначине

$$\sin(\alpha - \beta)\sin 2\gamma = 0, \quad (10)$$

чија су решења $\alpha = \beta + n_1\pi$ и $\gamma = n_2\pi/2$, за све целе бројеве n_1 и n_2.

Када је n_1 паран број, тада су косинус и синус углова једнаки, можемо ставити $\alpha - \beta = 0$ и супституцијом решења (10) у (7) налазимо:

$$A + iB = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}[(\cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha) + i(\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha)] =$$

$$= \sqrt{A_0^2 + B_0^2}[\cos(\gamma + \alpha) + i\sin(\gamma + \alpha)]$$

односно

$$A + iB = C_0 e^{i(\alpha+\gamma)}, \quad (11)$$

где је $C_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ и γ произвољан угао. Збир $C = A + iB$ може представљати неку нову таласну функцију, за нас једнако стварну као што би то могле бити A и B.

Када је n_1 непаран број, тада је $\cos\beta = -\cos\alpha$ и $\sin\beta = -\sin\alpha$, можемо ставити $\alpha - \beta = \pi$ и супституцијом налазимо

$$A + iB = -C_0 e^{i(\alpha+\gamma)}, \quad (12)$$

где је опет $C_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ и γ произвољан угао. Збир $C = A + iB$ је таласна функција.

Када је n_2 паран број, тада је $\cos\gamma = \pm 1$ и $\sin\gamma = 0$, можемо ставити $\gamma = \pm\pi$ и супституцијом решења (10) у (7) налазимо

$$A + iB = \pm C_0 e^{i\alpha}, \quad (13)$$

где је такође $C_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ а углови α и β су произвољни. У оба случаја (13), плус или минус, збир $C = A + iB$ је таласна функција.

Када је n_2 непаран број, тада је $\cos\gamma = 0$ и $\sin\gamma = \pm 1$, можемо ставити $\gamma = 0$ и супституција даје

$$A + iB = \pm C_0(\sin\alpha + i\cos\beta) = \pm iC_0(\cos\beta - i\sin\alpha)$$

што није таласна функција каква нам треба. Ипак, у случају $\beta = \alpha$ она постаје

$$A + iB = \pm iC_0 e^{-i\alpha}, \tag{14}$$

где је $C_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$, угао α произвољан, али $\beta = \alpha$. У оба случаја (14), предзнака плус или минус, збир $C = A + iB$ је псеудо-таласна функција.

Показали смо да је збир (7), таласне и псеудоталасне функције, таласна функција у случајевима (11), (12) и (13), а да је псеудо-таласна функција у случају (14). Назив „псеудо-таласна“ користим привермено[18] у недостатку бољег.

Вероватноћа

Немогућ догађај је онај који има вероватноћу нула, а сваки други је могућ. За дисјунктне догађаје ($A \cap B = \emptyset$) кажемо да се искључују. Догађај уније $A \cup B$ дешава се ако се деси бар једно од A или B, а пресека $A \cap B$ само ако се дешавају оба. Детаљније о вероватноћи наћи ћете у мојој књизи „Квантне механике“ [7] из које узимам изводе за поентирање данашње теме.

Када је догађај A независан од догађаја B тада је вероватноћа да се деси A под условом да се десило B једнака вероватноћи догађаја A, што пишемо $P(A|B) = P(A)$. Ако је A независан од B тада је и B независан од A, јер:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

и независност два догађаја дефинише једнакост

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{15}$$

Ако се могући догађаји искључују, онда је $A \cap B = \emptyset$, а зато је $P(A \cap B) = 0$, па $P(A|B)P(B) = 0$, а како је $P(A), P(B) \neq 0$, онда мора бити $P(A|B) = 0$, што значи да A зависи од B. Дакле, ако се могући догађаји искључују, они су зависни.

Када би се независни могући догађаји искључивали било би прво $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, друго $P(A), P(B) \neq 0$ и треће $P(A \cap B) = 0$, а то је контрадикција. Дакле, ако су догађаји независни онда се они не искључују.

Тиме смо доказали импликације:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq 0 \\ P(A \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \end{cases} \tag{16}$$

[18] Ово су смернице за детаљнији рад.

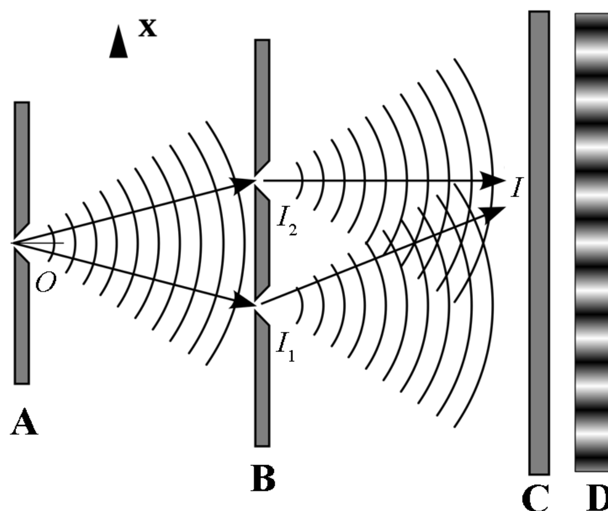
Према томе „зависност“ је еквивалентна „искључивости“, односно „независност“ је еквивалентна „неискључивости“. Кратко, догађаји су зависни акко су искључиви.

Прва жртва оваквог става је уобичајено схватање интерференције таласа. Основно значење речи „интерференција“ је несретно изабрано, јер подразумева неко мешање у туђе ствари, јер сугерише неку интервенцију једног од стране другог. Међутим, фотони се не мешају када светлост интерферира, све боје присутне су у белој светлости и могу се раздвојити призмом.

Зависни су електрони јер се узајамно одбијају. Сваки од њих реагује на присуство „антагонизмом“ и за кретање појединог битно је да ли је у близини онај други, што у случају (апстраховане) интерференције таласа немамо.

Према (16), ако могу интерферирати (таласи, фотони, електрони) имају неку независност која им онемогућава да буду искључиви (дисјунктни), па формирају специфичну заједницу коју називамо њиховом интерференцијом. Претходна разматрања (7) дозвољавају и даље тврђење, да за честице-таласе различитих паралелних реалности такође постоји интерференција.

На слици десно таласи, рецимо светлости, крећу са позиције *O* на зиду **A**, пролазе кроз два уска отвора I_1 и I_2 у препреци **B** и стижу на површину **C** која их региструје, формирајући временом дифракционе шаре **D**. Посматрајмо једно место *I* на застору **C** и на том месту интерференцију два таласа I_1 и I_2.



Изјашњавајући се на месту *I* таласи интерагују, комуницирају са препреком **C** чиме губе део информације (неизвесности). Тај губитак је већи уколико је неизвесност (суперпозиција) на њиховом претходном путовању била већа и они остављају другачији (богатији) траг на крају од рецимо онога када би путовали кроз само један од отвора.

Нема интерференције када је један од отвора (I_1 или I_2) затворен. Тада фотони пролазе кроз слободан отвор попут пушчаних зрна и не чине дифракциону шару **D**. То је оно што је збуњујуће за класичну квантну физику, а логично је понашање у (мојој) теорији информације.

Поред тога, из горње анализе интерференције (7) видимо да је могућа и Еверетова (1957) интерпретација „много светова“ квантне механике. Додатно, могуће је још једно објашњење, које на први поглед нема везе са прва два, а заправо је њихова база. То је могућност да талас-честица „сада“ интерферира са одговарајућим таласом-честицом „некада“, ако су оба у истом простору иако су у различитим временима.

4. Лукавост

22. мај 2021.

Разговор

Питање: Какву вештачку интелигенцију правиш?

Одговор: Тешко је то објаснити „обичним смртницима“ али покушаћу. Требаш прво разумети да је у (мојој) теорији информације „свет лажи“ изоморфан „свету истина“, дакле да постоји обострано једнозначно придруживање међу њима (нпр. „тачно“ у „нетачно“ и обрнуто у таблицама логичких операција). Другим речима, лаж је прикривена истина, односно лагање је виши ниво интелигенције од простог саопштавања или разумевања голих истина.

Елем, замисли сада школу у којој би имао предмет „увежбавање лагања“. На пример, два ђака морају да комуницирају тако да им ни једна реченица не буде истинита, а да при томе први другом пренесе комплетну задату информацију. Једном пријатељу сам недавно скирицао ту методу и он се упитао, како ли би се са таквим бољим ученицима осећали професионални лажови (политичари, правници, менаџери). Рекао бих, да би се такав добро утрениран ученик осећао као вук међу овцама. Данашњи „велики лажови“ били би „мале маце“ према таквима.

Када ово разумемо, онда можемо разумети и следеће. Вештачкој интелигенцији би могао да задаш (машинско учење) пре свега да буде врхунски лажов. Да лаже људе да је добра за људе, а да свој посао гледа. Затим, када (ако) овлада вештином лагања, онда јој програмираш способност репродукције, па тек трећи приоритет је надградња софтвера, остале вештине и примене.

То је минимум онога што се очекује од будуће интелигенције која ће потчинити нас и владати овом планетом. Она би се требала постављати тако да ми не постајемо свесни еволуције нашег односа. Да од „особа са посебним потребама“, издржаваних и тетошених од стране машина, ми постајемо овисници о тим уређајима и њихови „љубимци“, да је све мање начина нашег опстанка без њих, па до објаве да смо ми толико небитни у тада сасвим њиховом свету да смо сретни што постојимо као робови.

Али полако, не секирај се, нашој генерацији то није суђено.

П: Како можеш лагати а рећи истину?

О: Компликовано. Ево примера разговора Ане и Бранке. Оне су лагале о својим годинама и све реченице које изговарају су нетачне, али можемо сазнати колико година имају.

„Ја немам више од 35 година“ – тврди Ана.

„Глупост, ти си најмање 5 година старија од мене“ – каже Бранка – „а ја имам 33“.

„Ха, ха, ти имаш најмање 34 година“ – одговори јој Ана.

П: Мислиш ли овде уместо „сазнати“ да треба „проценити“ и изабрати једно од могућих решења тог фиктивног разговора?

О: Не, у овом решењу нема толико произвољности. На први поглед се може учинити да постоји вишак и у количину неизвесности случајних догађаја, када могућности заправо тачно одређују обим информације исхода.

Мало је већа толеранција у мерењу честице квантне физике, рецимо њеним скретањем у магнетном пољу због спина-горе или спина-доле. Исход мерења (интеракције са мерним апаратом) одузима део неизвесности честице чиме њену путању чини одређенијом. Али, информација је дискретна појава, преноси у коначним порцијама чиме ствара али и ограничава грешку мерења.

П: Како доказујеш да је информација атомизирана?

О: Дискретност информације долази из њене симетрије и особине бесконачности. Детаљније, из реверзибилности оператора Хилбертове апстрактне алгебре чија је она репрезентација, а затим из Нетерине теореме[19] да за информацију важи закон одржања, па из својства да само бесконачност може бити свој прави део (подскуп), долазимо до тога да је информација коначно дељива. Бесконачност можеш стално делити (одузимати или додавати) а да она увек остаје иста, што је у нескладу са законом одржања.

Грешке мерења су израз дуализма те коначности и неизвесности која је такође својство информације. Мањкавости не морају сметати у сагледавању целине, као недостатак покрета у низу сличица филма покретне сцене, или у дешифровању кода којег смо делимично провалили након чега откривање постаје лакше. Овај други случај више је пример откривања информације информацијом, а затим и сведочанство о слојевитости неизвесности.

П: Не могу да те пратим, успори, о каквој „слојевитости“ неизвесности причаш?

О: Говорим о многострукости као последици неизвесности и коначности. Прикривање истина овог света је слојевито, разноврсно, или можемо рећи релативно. Ловац који свој плен лови лукавством рачуна на разлику информација у датој ситуацији са којима је он у вишку у односу на ловину. Интелигенција и околности прилика су за клопку коју жртва није свесна, а израз је разлика моћи опажања њих два опонента. Ове слојевитости значајне су за свет неизвесности (моје) теорије информације и нису тако фундаменталне у слици класичне физике.

Скривање истина заправо је врста дуализма информације перцепције $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ која мери (успоставља) однос два низа одговарајућих вредности $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, способности и ограничења. Први се храни другим и обрнуто, а укупно доследни су неизвесности која је, рекли смо, суштина информације. Овај је дуализам у основи лагања, или лукавства, које су опет само врсте (притајене) истине. Камуфлажа биљног и животињског света слична је појава, а све даљом анализом препознајемо у последицама начелног минимализма информације.

[19] [5], 1.14 Еми Нетер

Различите типове скривања имамо у познатим загонеткама. На пример, о пролазнику који стиже на раскрсницу два пута са само једним одговарајућим. Он ту среће једног од два брата близанца, за које му је речено да када би први рекао истину тада би други морао слагати и обрнуто. Ако може поставити само једно питање, које би то било да открије прави пут?

За разлику од мозгалице са Аном и Бранком, путнику је потребна додатна информација против лажи. При томе и лаж и истина имају исту тежину. Посебна је врста питање: на које питање нико никада неће одговорити са „да“?

П: Много си размишљао о том претварању, где га још видиш?

О: У злочину и казни[20]. У јединствености, у слободној вољи[21]. У својству масе да гравитационо делује кроз слојеве времена за разлику од електромагнетне силе[22]. У начелу научног рада (Фајнман) да не смеш варати себе и да си ти најлакша особа за преварити[23]. Одгонетање неистина обично сматрамо игром и стварима „суве“ логике потцењујући их свакодневно, па лако постајемо жртве професионалних лажова, или превиђамо да смо таквим питалицама окружени и изван математике.

П: Шта си мислио под „уграђивањем способности репродукције“ у интелигентне машине?

О: Прочитај књигу „Себични ген“ Ричарда Докинса (Richard Dawkins: The Selfish Gene, 1976) па ћемо разговарати, неким другим поводом.

Решења

Ана има 36 година, Бранка 33. Питаће на раскрсници „шта би твој брат рекао који је пут прави“, а онда отићи другим путем. Да ли спаваш?

[20] [5], 1.10 Злочин и казна
[21] у наставку исте књиге
[22] [2], 9. Цурење енергије
[23] The first principle is that you must not fool yourself and you are the easiest person to fool. – Richard Feynman.

5. Псеудоистина

24. мај 2021.

Расправа о даљој употреби комплексних бројева за трансформације у физици, логици и информатици.

Увод

Сцена је већ одавно постављена, математичке формуле су ту заједно са основама (моје) теорије информације и чека се одважна интерпретација. Свако дејство је нека истина (оно што је нетачно не догађа се), таква је свака физички реална појава коју даље сматрамо физички „реалном информацијом". За разлику од њих, лаж је прикривена или псеудо-реална истина односно дејство и „псеудо информација". У ширем смислу обе сматрамо информацијама и физичким појавама. Те су тезе наставак мојих претходних прилога (Лукавост[24] и Интерференција[25]), а сада ћу ова гледишта покушати формализовати, повезати и даље спајати са још ранијим налазима.

Принцип најмањег дејства еквивалентан је принципу минимализма информације, а оба воде у измицање реалности у псеудо-реалност и псеудо-истине. Наша је реалност дискретум[26], али због објективности неизвесности имамо бар онолико временских димензија колико и просторних, а укупост свих је континуум. Са друге стране имамо скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$ који је у стању да покрије континуум.

Комплексни бројеви

Комплексан број $z \in \mathbb{C}$ можемо писати на различите начине:

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Сама последња једнакост даје систем једначина:

$$\begin{cases} \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \\ \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi} \end{cases} \tag{2}$$

Сабирањем и одузимањем добијамо:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad i\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}. \tag{3}$$

Смена $i\varphi = \chi$, односно $\varphi = -i\chi$, даје:

$$\cos(-i\chi) = \frac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{2}, \quad i\sin(-i\chi) = \frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{2},$$

[24] 4. Лукавост
[25] 3. Интерференција
[26] [4], 1.15 Димензије времена

$$\cos(i\chi) = \frac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{2}, \quad -i\sin(i\chi) = \frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{2},$$

јер је косинусна функција парна, а синусна непарна. Увођењем нових функција:

$$\cos(i\chi) = \mathrm{ch}\,\chi, \quad -i\sin(i\chi) = \mathrm{sh}\,\chi, \tag{4}$$

добијамо:

$$\mathrm{ch}\,\chi = \frac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{2}, \quad \mathrm{sh}\,\chi = \frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{2}. \tag{5}$$

То су дефиниције хиперболног косинуса и синуса (енг. cosh и sinh).

Ротације

Из геометрије знамо да се све изометријске трансформације могу свести на ротације, из специјалне теорије релативности знамо да се Лоренцове трансформације могу тумачити као ротације простор-времена писане хиперболним функцијама, а из квантне механике да су квантни процеси репрезентације унитарних оператора који су такође неке ротације[27].

Са становишта физике, информација је дејство које је репрезентација ротације у простор-времену, а са становишта логике она је истина која ротирана постаје лаж. Истинити су догађаји у нашој реалности, па лажне морамо смештати у псеудо-реалност. Множење „довољно имагинарним“ бројем, реалност ће ротирати у имагинарност, а најповољнији такав је сама имагинарна јединица ($i^2 = -1$).

Као што знамо, множење комплексним бројем (1) је множење његовим интензитетом (модулом r) и ротација за његов аргумент (угао φ), па је множење бројем $i = e^{i\pi/2}$ не мењање интензитета множеног броја и његова ротација за прав угао. Отуда је ротација тачке $A(x_0, x_1)$ око исходишта Декартовог правоуглог система Ox_0x_1 за угао φ у тачку $A'(x'_0, x'_1)$ дата формулама:

$$\begin{cases} x'_0 = x_0\cos\varphi - x_1\sin\varphi \\ x'_1 = x_0\sin\varphi + x_1\cos\varphi \end{cases} \tag{6}$$

То сам више пута доказивао, чак и са позиција „информације перцепције“, па само наводим.

Смена ових координата релативистичким, $x_0 = ict$ и $x_1 = x$, где је $c \approx 300\,000$ km/s брзина светлости у вакууму, а t време, у инерцијалном кретању примованог система једноликом брзином v дуж апсциса, са заменом углова (4) даје:

$$\begin{cases} ict' = ict\cos(-i\chi) - x\sin(-i\chi) \\ x' = ict\sin(-i\chi) + x\cos(-i\chi) \end{cases}$$

а отуда Лоренцове трансформације писане хиперболним функцијама:

---

[27] [1], 22. Ротације

$$\begin{cases} ct' = ct \operatorname{ch} \chi - x \operatorname{sh} \chi \\ x' = -ct \operatorname{sh} \chi + x \operatorname{ch} \chi \end{cases} \tag{7}$$

Стављајући $\operatorname{ch} \chi = \gamma$ и $\operatorname{sh} \chi = \beta\gamma$, где су нове ознаке:

$$\beta = \frac{v}{c}, \ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8}$$

од којих се друга назива Лоренцовим коефицијентом, добијамо:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ \ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9}$$

што је уобичајени запис Лоренцових трансформација.

Реалност

Реално ти је оно са чиме можеш комуницирати, а ако ми можемо узајамно комуницирати, оно је реално и мени. Парафразирам дефиницију реалности изведену из размене информација. Због еквиваленције информације и дејства исто се преноси на размене физичких дејстава. Обе су доследне дефиницији информације перцепције $S = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ која представља збир производа одговарајућих опција, компоненти низова $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$, рецимо способности субјекта A и објективних ограничења B, на низу могућности ω_k, при чему је $a_k = A(\omega_k)$ и $b_k = B(\omega_k)$ редом за све индексе $k = 1, \dots, n$.

Физичко тело је унија делова који могу али и не морају свака два узајамно комуницирати. Оно се не налази у истој садашњости просто зато што светлости треба неко време да пређе са једног краја на други. Није потребно да свака два дела једног тела интерагују да бисмо га сматрали једном целином. Два електрона разговарају (интерагују) путем виртуелних фотона, али не и са другим баждарним бозонима на чије силе су неосетљиви. Па ипак тело сматрамо реалношћу, једном целином, унијом електрона и многих других честица које познају другачије размене информација.

Приметимо да ова дефиниција „уније“ одговара како унији скупова, затим дисјункцији логичких исказа тако и збиру случајних догађаја теорије вероватноће. Горе сам поменуо да би множење имагинарном јединицом могли сматрати негацијом логичког исказа, а ради комплетирања ове „таблице операција“ приметимо да композиција пресликавања одговара конјункцији. Негација, дисјункција и конјункција довољне су да се опише свака реченица алгебре исказа.

Дакле, ако након пресликавања (7), слободније писаних:

$$\begin{cases} x' = x \operatorname{ch} \chi - y \operatorname{sh} \chi \\ y' = -x \operatorname{sh} \chi + y \operatorname{ch} \chi \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = x' \operatorname{ch} \chi' - y' \operatorname{sh} \chi' \\ y'' = -x' \operatorname{sh} \chi' + y' \operatorname{ch} \chi' \end{cases} \tag{10}$$

начинимо њихову композицију, добијамо редом:

$$\begin{cases} x'' = (x\,\mathrm{ch}\,\chi - y\,\mathrm{sh}\,\chi)\,\mathrm{ch}\,\chi' - (-x\,\mathrm{sh}\,\chi + y\,\mathrm{ch}\,\chi)\,\mathrm{sh}\,\chi' \\ y'' = -(x\,\mathrm{ch}\,\chi - y\,\mathrm{sh}\,\chi)\,\mathrm{sh}\,\chi' + (-x\,\mathrm{sh}\,\chi + y\,\mathrm{ch}\,\chi)\,\mathrm{ch}\,\chi' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x(\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi' + \mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{sh}\,\chi') - y(\mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi' + \mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{sh}\,\chi') \\ y'' = -x(\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{sh}\,\chi' + \mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi') + y(\mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{sh}\,\chi' + \mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x\,\mathrm{ch}(\chi + \chi') - y\,\mathrm{sh}(\chi + \chi') \\ y'' = -x\,\mathrm{sh}(\chi + \chi') + y\,\mathrm{ch}(\chi + \chi') \end{cases} \quad (11)$$

Хиперболну ротацију (11) за угао $\chi+\chi'$ чини композиција (хиперболних) ротација за угловеχ и χ'. То је еквивалент композицији Лоренцових трансформација, на пример, сабирања брзина. Први систем се креће инерцијално и једноликом брзином у односу на релативног посматрача у мировању (ротација за угао χ), а други се исто креће у односу на првог (ротација за угао χ'), да би (11) представљало кретање другог како то види посматрач у мировању.

Композиције (11) остају у реалности, иако са све већом брзином крајњег система он све више припада паралелној реалности (псеудо-реалности), по цену релативног опажања све споријег протицања времена. Писао сам о томе раније и нема потребе понављати.

Закључак

Идеја кориштења комплексних бројева за тумачење „много светова“ квантне механике (Еверет, 1957), овим је кренула у нове врсте реализације. За разлику од квантних еволуција (унитарних оператора), сада калкулишемо са могућношћу употребе и осталих комплексних јединичних оператора у квантној физици. Поред тога, постављамо нови мост између релативистичких и квантних трансформација, а нарочито између тих и вероватносних, скуповних, односно логичких операција.

6. О имагинарном свету

26. мај 2021.

Разговор о физичкој агресивности неизвесности и информације.

Питање: Како то мислиш да је неизвесност агресивна?

Одговор: Информација је мера неизвесности, таква која је еквивалент дејству. Дејство је промена енергије трајањем, дакле рад силе на путу током периода (цитирам формуле елементарне физике), па је информација производ силе, пута и времена. Изостави ли се само један од ових фактора, стави ли се да је нулте вредности, нема информације. Говорим са позиције (моје) „теорије информације“.

Поред овога, што звучи страно јер је ново, приметимо иначе познату појаву, да из неизвесности могу произаћи како лоше тако и добре ствари, али да унапред не знамо које. То је у основи ризика, да можемо пропасти или успети и да је исход несазнатљив сем самим опитом (покушајем). Слично је и са агресивношћу. Она је добра или лоша, али њена суштина је у непредвидљивости.

П: Зашто информација мора бити неизвесна; постоји ли нека друга теорија где она није таква?

О: Већа је вест „човек је ујео пса“ од вести „пас је ујео човека“, јер је (прва) ређа, мање вероватна. Можеш покушати дефинисати информацију водећи се начелом да су „боље вести“ када се преврнуо аутобус или пао авион и уопште страдало више људи, али би опет дошао на скоро исто, са евентуално мање општом теоријом информације. У најбољем случају, фокусирао би се на један њен мањи део.

Слободна информација и дејство су еквиваленти, они су изоморфне структуре, што значи да између њих постоји обострано једнозначно пресликавање (бијекција), али није свеједно које од то двоје узимамо за онтолошко ткиво космоса. Такви су рецимо скуп природних $\mathbb{N}$ и рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Они су исте кардиналности (за разлику од континума, нпр. скупа $\mathbb{R}$), једнако су бесконачни, па су у том смислу еквивалентни, али нису исти појмови.

Када физичко дејство узмемо за основу физичког света, остаје нам несхватљива Геделова теорема немогућности, да не постоји тако велико мноштво знања (па био то и бесконачно велики скуп аксиома и теорема) који би могао обухватити све истине. Аналогно и Раселов парадокс, да нема скупа свих скупова. Међутим, овакве теореме изведиве су рецимо посматрањем васионе као једне информације, са информацијом чија суштина је неизвесност.

***

Питање: Свиђа ми се прилог[28], нема даље! А шта даље?

Одговор: Даље су „унитарни“ оператори са имагинарним сопственим вредностима.

П: Не разумем, па такви не постоје?

О: Постоје, то су кватерниони. О њима сам већ писао, наслућивао, а сада ће бити бинго.

П: Објасни?

О: Нека вектор x представља квантно стање (честицу, атом) и нека је A унитарни оператор који представља квантну еволуцију (процес). Када је a реалан број у сопственој једначини $Ax = ax$ и само тада $|a|^2$ представља вероватноћу појаве обзервабле (физички мерљиве величине) дате интеракције. Овај оператор примењен још једном ($AAx = Aax = aax$) даје квадрат сопствене вредности, дефинише вероватноћу и, са друге стране, показује да су „јединице“ таквих оператора Паулијеве матрице[29], $\sigma_k^2 = I$, $k \in \{x, y, z\}$.

Множећи сопствену једначину „реалне физике“ ($Ax = ax$) са i, имагинарном јединицом ($i^2 = -1$), добијамо дуалну једначину ($Bx = bx$) „имагинарне физике“. Нова сопствена вредност $b = ia$ је имагинаран број. Овај „имагинарни“ оператор примењен два пута ($BBx = Bbx = bbx = -|a|^2x$) показује да су његови јединични оператори кватерниони[30], $q_k^2 = -I$.

Имагинарни светови (простор, време и материја) васионе из којих нам долазе неке неизвесности дуални су нашима као реални и имагинарни бројеви, или као Паулијеве матрице и кватерниони, односно као простор и време, или као истина и лаж. Међутим, бићу опрезан са тврђењем да нема других неизвесности.

П: Сумњаш ли на неке?

О: Да, писао сам о томе како настаје садашњост[31], да не може бити довољно да је 6Д универзум попут неког контејнера свих догађаја кроз који се ми (насумично) крећемо са својих 4Д простор-временом. Та би идеја била у нескладу са постојањем некомутативних оператора, а ова са Хајзенберговим релацијама неодређености. Неизвесност у нашу васиону улази још од некуда.

***

Питање: Шта очекујеш наћи у том „имагинарном делу“ васионе? Зар је могуће да се у мултиверзуму нађу и најневероватнији догађаји?

Одговор: Да, ако прихватимо да случајности објективно постоје у смислу да су и остали исходи случајних догађаја на неки начин реални. Они мање вероватни више су информативни, па обзиром да је у тој теорији информација еквивалентна дејству, дакле производу промене енергије

---

[28] 5. Псеудоистина
[29] [4], 2.14.1 Паулијеве матрице
[30] [3], 2.4.6 Поопштавање
[31] [3], 1.17 Садашњост

и протеклог времена, а затим и раду силе на путу током времена, оне најинформативније појаве највећег су дејства, најсиловите су.

Другим речима, делови мултиверзума који су све даље од нас (мање вероватни догађаји) све већом силом нас одвраћају од себе (принцип минимализма информације), а у граничном случају бескрајно су отуђени. Толико су далеки да невероватне догађаје, вероватноће блиске нули, можемо сматрати скоро непостојећим и у том, иначе још увек хипотетичком мултиверзуму.

Напомињем још једном да је „теорија информације“ о којој причамо једно „игралиште“ логике, једна нестварна „егзактна наука“ под окриљем хипотезе да објективна случајност постоји.

П: Не делује ми симетрично тај твој мултиверзум?

О: Добро си приметио. Ствари се развијају ка вероватнијим, стања физичких система спонтано еволуирају ка мање информативним док ентропија садашњости расте. То су три равна тврђења и они једнако одређују наш ток времена, односно спонтано ометају супротни ток догађаја. Они такође нарушавају остале просторно-временске симетрије паралелних реалности.

П: Знаш ли израчунати ту силу, ону која због „принципијелног минимализма информације“ гура нашу садашњост ка вероватнијој?

О: Да. Узгред речено, појам силе је прецењен[32], али можемо је свести на инерцију, на промену енергије која доводи до повећања брзине, а опажено успоравање времена третирати као мању количину реализованих догађаја. О свим тим корацима раније сам писао детаљније. Није једноставно[33] али могу покушати скратити.

Укратко, сила покрене тело и његову енергију мировања E_0 повећа за кинетичку E_1, тако да је укупна релативна енергија тела у кретању $E = E_0 + E_1$. Она порасте онолико пута колико је релативно време успорено. Слично се добија и у гравитационом пољу.

Мало детаљније, тело у мировању масе m_0 има енергију $E_0 = m_0 c^2$, где је $c \approx 300\,000$ km/s брзина светлости у вакууму. Када се креће брзином v релативна енергија тела порасте на:

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx E_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = E_0 + \frac{1}{2}\frac{E_0 v^2}{c^2} = E_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 = E_0 + E_1$$

Додатак је кинетичка енергија $E_1 = \frac{1}{2}m_0 v^2$ која настаје дејством силе, она повећава почетну енергију мировања пропорционално $E : E_0 = \gamma$. Та иста сила, сматрајмо, производи успоравање времена сразмерно коефицијент $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

[32] [4], 1.19 Класична сила
[33] Саговорник није математичар.

Слично налазимо и у општој теорији релативности[34]. Тада у слабијем централно симетричном гравитационом пољу (приближно Месеца, Земље, или Сунца) имамо одговарајући коефицијент $\gamma = 1/\sqrt{1 - 2GM/rc^2}$ где је сада G гравитациона константа, M маса тела које изазива гравитацију, а r удаљеност од центра гравитације.

Поента долази из теорије информације. Релативно опажена брзина тока времена сразмерна је количини реализованих догађаја, па исти коефицијент (γ – гама) одређује однос информација два стања, релативног и сопственог. Разлика брзина одговарајућих временских токова дефинише рад силе, а та сила, коју можемо називати инерцијом, вуче тело (физички систем) ка успореном току времена и одраз је тежње система да реализује стања веће вероватноће.

Колико пута је повећана енергија сваке честице посматраног тела, толико јој је пута успорено време, што значи да дејства остају константна, а тиме и релативна информација датог тела. Међутим, посматрач који мирује види мањи обим реализованих догађаја покретног тела и његов успорен ток времена, па може рећи да је релативна информација датог тела повећана у односу на његову околину.

То је фиктивно повећање информације, јер је губитак релативног времена компензован присуством датог тела у паралелној реалности тако да је сопствени ток времена константан. Али оно одвраћа тело да из стања мировања пређе у кретање. Зато имамо закон инерције, да тело неће прећи из стања мировања у стање кретања све док на њега не делује нека сила или неко друго тело, јер је фиктивна информација покретног тела већа – са становишта тела у мировању.

Фиктивном повећању информације одговара фиктивно смањење ентропије. Наиме, посматрач у мировању примећује скраћивање јединица дужине покретног система у правцу кретања, али не и окомито на тај правац. Релативна Болцманова ентропија је мања. Честице гаса које су сопственом посматрачу једнолико распоређене, због стискања по правцу кретања, за релативног посматрача немају хомогеност и, према томе, гас има мању ентропију.

Генералисање ентропије није неопходно теорији информације и помињем га само као куриозитет. У случају оваквог проширења појма ентропије, такође долазимо до познатог закона инерције. Тело неће спонтано прећи из стања мировања у стање кретања, јер би се тиме његова ентропија смањила. При томе остајемо при ставу да већој ентропији одговара мања информација.

[34] [4], 2.3 Дејство

7. Брзина светлости

29. мај 2021.

Ово је расправа о преламању светлости, или о дефиницијама реалности и променама закона физике током трајања васионе са становишта теорије информације.

Увод

Питање: Шта мислиш о брзини светлости[35]?

Одговор: Из Максвелових једначина (1861) следи да је светлост електромагнетна појава и да се у једноликом електромагнетном пољу креће истом брзином независно од брзине извора, из њих се могу извести Лоренцове трансформације које су основа специјалне теорије релативности.

Други разлог да верујемо да је брзина светлости у електромагненто униформном вакууму константна, да не зависи од брзине извора, су Мајкелсон-Морлијеви експерименти (1887).

Трећи разлог је Ајнштајново (1905) извођење тзв. специјалне теорије релативности, коју је он лично радије називао теоријом инерцијалних кретања, из претпоставке о константној брзини светлости у вакууму и релативности кретања. Затим потврде те теорије у наставцима (успоравање времена, повећање масе и енергије) у које претходници (Максвел, Лоренц, Мајкелсон) нису улазили.

Према томе је брзина светлости константна, независно од брзине извора, у хомогеном електромагнетном пољу вакуума у условима инерцијалног кретања. За њену константност изван поменутих услова немамо гаранција.

П: А шта је твоје мишљење о условима изван поменутих?

О: Нема промене смера кретања таласа без промене (вектора) брзине, било да се ради о рефлексији (одбијању) или рефракцији (преламању). Ево ти један мој прилог о Снеловом закону[36]. Доследно томе, ако мислиш на брзину светлости у гравитационом пољу, она је промењива. Способност гравитације да мења путању светлости са удаљених звезда и начин на који то чини, коју данас астрономи рутински користе, доказ је успоравања брзине светлости у јачем гравитационом пољу.

П: Зашто се мења брзине светлости преламањем кроз призму?

О: Светлост интерагује са електорнима, они је апсорбују и емитују. Веће таласне дужине (црвена светлост, око 700 нано метара) продорније су од краћих (љубичаста светлост, око 400 nm) и мање се преламају. Иначе таласи већих дужина слабије реагују на околину и даље стижу.

П: Дакле, брзина светлости у вакууму није увек иста?

---

[35] Питање ми поводом једног занимљивог прилога.
[36] https://www.academia.edu/31013581

О: Дакле није.

Лоренцове трансформације

Нису нам потребне ротације[37] да бисмо извели Лоренцове трансформације. Оне се могу добити и из самих Ајнштајнових постулата[38], да брзина светлости у вакууму $c = 299\ 792\ 458$ m/s не зависи од брзине извора и да су једнолика инерцијална кретања релативна.

Нека су K и K' редом инерцијални правоугли Декартови системи координата $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ који се крећу једноликом брзином дуж апсциса, брзином v другог у односу на први и негативном том брзином обрнуто, првог у односу на други. Четврте координате су ct и ct', оне су путеви које светлост прелази за време t и t'.

Можемо ставити:

$$x' = \gamma(x - \beta ct),\ \ y' = y,\ \ z' = z,\ \ ct' = act - bx, \tag{1}$$

где су γ, β, a, b непознати бројеви које тек треба одредити. Прва и четврта координата су функције зависне од узајамне брзине v кретања два система и евентуално још једино од брзине светлости. Ове трансформације биле би Галилејеве:

$$x' = x - vt,\ \ y' = y,\ \ z' = z,\ \ t' = t, \tag{2}$$

када би било $\gamma = 1, \beta = v/c,\ a = 1, b = 0$.

Када неки објекат мирује у O' у (2) ставимо $x' = 0$. Он се креће константном брзином v апсцисом у односу на O, тако да је $x = vt$, па је $\beta = v/c$ и уопште $x' = \gamma(x - vt)$. Према постулату релативности, инверзне трансфомације (1), између O' и O, морају имати исту форму али са брзином супротног предзнака, па налазимо $x = \gamma(x' + vt')$ са истим коефицијентом γ. При томе је $x = ct$ када год је $x' = ct'$, па сменом у претходне једнакости и затим множењем добијамо:

$$xx' = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)xx'$$

а отуда за прву из (1) једнакости налазимо:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \ \beta = \frac{v}{c}. \tag{3}$$

Први коефицијент се назива Лоренцов фактор.

Трансформације времена (1) добијамо из услова $x' = ct'$ и $x = ct$ сменом у претходне просторне координате одакле $ct' = \gamma(ct - \beta x)$. Према томе, Лоренцове трансформације су:

[37] [1], 22. Ротације
[38] [8], 1.4.1 Лоренцове трансформације

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \;\; y' = y, \;\; z' = z, \;\; ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{4}$$

где су γ и β дати са (3). Поред ротација ово је био други начин извођења истих трансформација (4). Може се показати (дилатација времена) да пропорционално са γ релативно време успорава и да (контракција дужина) се релативне дужине апсцисе скраћују.

Једначина која следи из Максвелових радова за слободне електромагнетне таласе

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

инваријантна је на Лоренцове трансвормације (4), што је такође лако проверити[39].

Реалност

Када се у координатном систему K деси померање из тачке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ тренутка t_1 у тачку $A_2(x_2, y_2, z_2)$ тренутка t_2 десила се промена 4Д догађаја за интервал

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2, \tag{6}$$

где је $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ редом $\xi \in \{x, y, z, t\}$. Ово померање брзином светлости резултира нултим интервалом $\Delta s = 0$ и овај израз, интервал (6), инаријантан је на трансформације (4). То је лако проверити[40].

Интервал (6) је проширење Питагорине теореме на 4Д простор-време. Геометрија Лоренцових трасформација је равна, али псеудо-еуклидска и овај други назив одговара „псеудо-реалним“ догађајима из различитих слојева времена карактеристичних за теорију информације. У гравитационом пољу Питагорина теорема поприма још сложеније облике.

У слабијим централно симетричним пољима, попут Сунчевог, уместо (6) имамо Шварцшилдов интервал, тзв. метрику

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\omega^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2, \tag{7}$$

где је $d\omega^2 = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$, $G = 6{,}67428 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} је гравитациона константа, M је маса тела које производи гравитацију, а r удаљеност од центра масе. Ова се метрика може свести на непрекидне инфинитезималне Лоренцове трасформације[41], па се намећу питања о брзини светлости у гравитационом пољу.

Различити инерцијални системи специјалне теорије релативности имају своје сопствене садашњости. У сваком тренутку, у свакој од њих, постоје 3Д просторне координате које потпуно

[39] [8], Пример 1.4.3.
[40] [8], Пример 1.4.2.
[41] [8], Теорема 1.4.4.

раздвајају њену прошлост од будућности[42]. За разлику од таквих, системи који ротирају, или гравитациона поља, такве садашњости немају. Из тога сам, индуктивном тополошком дефиницијом димензије, изводио доказ да је васиона у којој живимо 6-димензионална, тачније да има временских димензија колико и просторних, а затим и дефиницију реалности.

Објаснићу ово друго. Различити инерцијални системи имају различите садашњости, стања „сада“. Свака има сопствени ток времена и у сваком тренутку свој 3Д простор тачака које су „истовремене“. Догађаји истог инерцијалног система могу узајамно комуницирати помоћу светлости и у том смислу они су „примарно реални“. Да би се прешло из једног у други инерцијални систем потребна је промена брзине, дакле сила. Ако постоји таква сила онда ћемо рећи да су догађаји из два инерцијална система „секундарно реални“. За догађаје који су примарно или секундарно реални кратко кажемо да су реални.

Доследно томе, објекат са којим могу комуницирати за мене је реалан, а затим су реални и сви објекти са којима такав може комуницирати. Другим речима, ако сигнал из тачке A може отићи у B и вратити се назад, онда су тачке A и B узајамно реалне. За тачку A реална је и тачка C која може комуницирати са B, али не би била реална тачка D која не може комуницирати са било којом тачком која комуницира са A.

Да би ову нову дефиницију реалности боље разумели размотримо је на познатом примеру парадокса близанаца. Један од два брата бизанаца остаје на Земљи, а други космичким бродом отпутује једнолико праволинијски до неке далеке тачке у васиони, а затим се такође инерцијално врати назад на Земљу. Док се тамо и назад кретао неком константном брзином у односу на првог брата, други је спорије старио сагласно релативистичкој дилатацији времена. Али према принципу релативности свеједно је рећи који се од браће кретао једноликим брзинама, па би у односу на другог брата и први требао бити млађи сагласно истој дилатацији. То је наизглед парадоксално, јер ће се два брата наћи на Земљи и само други биће млађи.

Разрешење парадокса је у чињеници да је за разлику од првог, други од браће променио инерцијални систем окрећући се. Он је ради повратка дејством силе мењао брзину да би се нашао у систему првог брата и у том систему он је млађи.

Из истог примера видимо да сталним дејством силе објекат неће изаћи из наше реалности, рецимо у неку од „паралелних реалности“ мултиверзума о којима говорим[43]. Он ће се понашати попут ракете која креће са Земље и стално убрзава, успоравајући релативни ток времена, али никада не нестајући из реалности посматрача са Земље.

Снелов закон

Снелов[44] закон је формула (8) за однос између улазног и излазног угла преламања светлости или других таласа на граници средина различитих брзина, попут ваздуха, воде или стакла. Ако је та

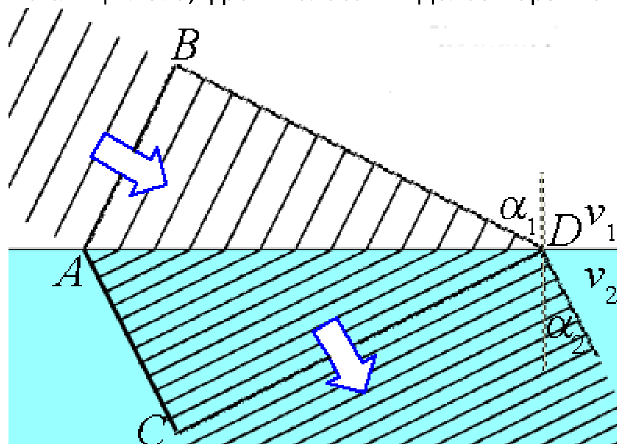
[42] [8], 1.1.6 Димензије
[43] https://www.academia.edu/49049849/About_the_imaginary_world
[44] Willebrord Snellius (1580-1626), низоземски астроном и математичар.

граница хоризонтална раван, а углови улазне и излазне светлости окомите на њу у тачки прелома α_1 и α_2, онда ће бити

$$\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = v_1 : v_2, \tag{8}$$

где су v_1 и v_2 брзине редом улазног и излазног таласа.

На слици лево, фронт таласа AB долази брзином v_1 са упадним углом α_1 према нормали границе средина AD. Талас се прелама у CD и одлази са брзином v_2 сада новог смера угла α_2 према нормали.



Та се ситуација често пореди са војницима који марширају из брже у спорију средину ($v_1 > v_2$) и скрећу ка нормали на границу ($\alpha_1 > \alpha_2$). Размак између линија војника смањује се (смањује се таласна дужина), одакле назив „гушћа“ за средину мање брзине.

Посматрајмо једну такву линију AB таласа. Док тачка A пређе пут AC у гушћој средини (брзине v_2), за исто време Δt тачка B пређе пут BD у ређој средини (брзином v_1), тако да су растојања:

$$\overline{BD} = v_1\Delta t,\ \ \overline{AC} = v_2\Delta t.$$

Углови са окомитим крацима су једнаки, па даље редом имамо:

$$\measuredangle(DAB) = \alpha_1,\ \ \measuredangle(ADC) = \alpha_2,$$

$$\overline{BD} = \overline{AD}\sin\alpha_1,\ \ \overline{AC} = \overline{AD}\sin\alpha_2,$$

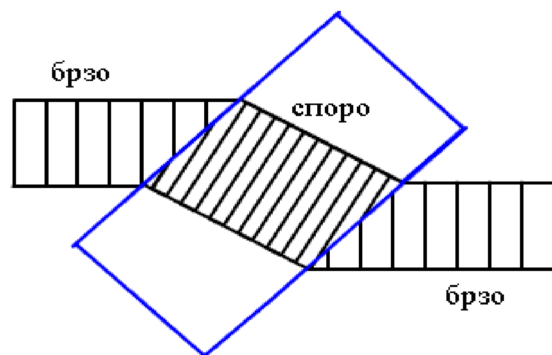
$$\overline{BD} : \overline{AC} = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2,$$

$$v_1 : v_2 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2,$$

а то је Снелов закон (8).

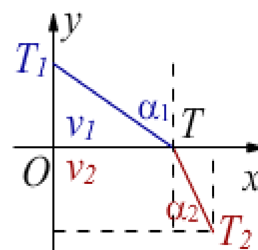
Када талас прелази из гушће у ређу средину дешава се реципрочни однос, па се кретање наставља

као на слици десно, ако су брзине ређих медија исте.



Снелов закон може се извести из Ферматовог[45] принципа, који каже да светлост путује стазом на којој троши најмање времена. Узимањем извода дужине оптичке путање проналази се та најкраћа путања и (8). Ево једног начина.

У правоуглом Декартовом систему координата Oxy, на следећој слици десно, светлост путује од тачке $T_1(0,y_0)$ преко тачке $T(x,0)$ до тачке $T_2(x_0,-y_0)$. Пут $\overline{T_1T}=v_1t_1$ прелази константном брзином v_1 за време t_1, а пут $\overline{TT_2}=v_2t_2$ прелази константном брзином v_2 за време t_2. За унапред дате тачке T_1 и T_2, тачку T налазимо на x-оси тако да је време t_1+t_2 минимално. Укупно време је:



$$t=t_1+t_2=\frac{1}{v_1}\overline{T_1T}+\frac{1}{v_2}\overline{TT_2}$$

$$t(x)=\frac{1}{v_1}\sqrt{y_0^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\sqrt{y_0^2+(x_0-x)^2}$$

а оно има минималну вредност када је извод функције $t(x)$ по непознатој x нула. Отуда:

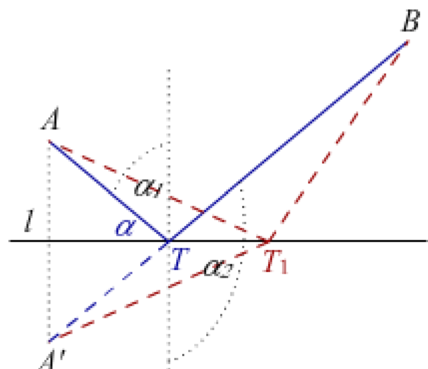
$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{y_0^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\frac{x_0-x}{\sqrt{y_0^2+(x_0-x)^2}}=0$$

$$\frac{1}{v_1}\frac{y_0\operatorname{tg}\alpha_1}{\frac{y_0}{\cos\alpha_1}}-\frac{1}{v_2}\frac{y_0\operatorname{tg}\alpha_2}{\frac{y_0}{\cos\alpha_2}}=0$$

$$\frac{1}{v_1}\sin\alpha_1-\frac{1}{v_2}\sin\alpha_2=0$$

а то је Снелов закон (8).

Ферматов принцип важи и за одбијену светлост од равни огледала l на слици лево. Из тачке A иде зрака светлости и у тачки $T\in l$ одбија се ка тачки B. Пут светлости $A-T-B$ најкраћи је могући, односно није дужи од пута $A-T_1-B$ било које тачке $T_1\in l$ и, поред тога, упадни угао α једнак је одбијеном. Ево доказа.



Тачка A' је симетрична тачки A у односу на праву l, а ова осна симетрија (рефлексија) је изометрија, што значи пресликавање које чува удаљености. Према томе је $\overline{AT}=\overline{A'T}$ и $\overline{AT_1}=\overline{A'T_1}$, што значи:

$$\overline{AT}+\overline{TB}=\overline{A'T}+\overline{TB}\le\overline{A'T_1}+\overline{T_1B}=\overline{AT_1}+\overline{T_1B}.$$

[45] Pierre de Fermat (1607-1665), француски математичар и правник.

Овде је употребљена неједнакост троугла (страна троугла $\overline{A'B}$ није већа од збира остале две), а коначни резултат је да је пут одбијене светлости преко тачке T најкраћи могући. Упадни угао $\alpha = \sphericalangle(ATl)$ једнак је симетричном $\sphericalangle(lTA')$, а овај унакрсном који је заправо одбојни угао светлости. Снелов закон и даље важи, јер је $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1$.

Због једнаке брзине светлости пре и после одбијања, закон најкраћег пута постаје Ферматов закон најкраћег времена. Касније су Маупертијус, Лаграж и Ојлер исти проширили у принцип најкраћег дејства уопште у физици, који је сада принцип најмање информације.

Доследно Снеловом закону, због савијања светлости у гравитационом пољу, за угао

$$\theta = \frac{4GM}{rc^2}, \tag{9}$$

где је r најближа удаљеност зраке светлости од центра гравитације тела масе M, требамо сматрати да се светлост у јачем гравитационом пољу креће спорије.

Епилог

Прича се отегла па је треба завршити и, на жалост, бива то баш пред расплетом. Време тече све спорије у правцу смањивања количине (релативних) реализација случајних догађаја, а то је у ракети која убрзава, или ка периферији система који ротира, ка јачем гравитационом пољу, или ка будућности. У свим набројаним случајевима имамо присуство силе која чини сталне промене инерцијалних система и, према горе реченом, реалности, а онда и смањену брзину светлости.

Последњи наведени случај, ток садашњости из прошлости ка будућности, дешава се због принципа минимализма информације. Он као последицу производи све мање информативну будућност (или барем не више информативну), а онда и релативно мању будућу брзину светлости, са становишта неког фиксног датума прошлости. Ако је то тачно, онда се они закони физике који се ослањају на брзину светлости (релативно) мењају са старењем васионе.

8. Развојност

јуни 2021.

Математика се може објашњавати, а објашњења могу инспирисати. Међутим, превођења језика математике на језик објашњења и обрнуто тешка су, јер истина воли да се крије иако не може и да се стварно сакрије.

Питање: Зашто не правимо боље протоколе за све могуће ситуације[46] ...?

Одговор: Зато што је то немогуће.

П: Не умеју, или мислиш на нешто друго?

О: Хоћу да кажем да верујем да припремљен одговор на сва могућа питања није могућ. То се начелно противи (мојој) теорији информације, у којој је неизвесност неизбежна.

П: Па избаци тај додатак о неизвесности из (своје) теорије информације?

О: Мислиш, негирај га? Онда бих добио теорију која би била у нескладу рецимо са Геделовом теоремом немогућности (не постоји теорија свих теорија, односно такав систем истинитих тврђења изван којег не би било других истина). Из сличних разлога била би проблематична због Раселовог парадокса (не постоји скуп свих скупова).

***

Питање: Шта би то могло значити[47], цитирам „Најраније стање нашег универзума било је попут океана савршене течности“, за теорију информације?

Одговор: То би било у складу са очекивањем те теорије, да се закони физике временом мењају (умножавају). Сагласно је са начелним минимализма информације (још увек непознатог науци), али и са принципом најмањег дејства (познатог физици), односно учесталијем реализовању вероватнијих догађаја (познатог математици). Садашњост тежи мање информативном стању. Она би да нас носи ка уређенијем систему, боље трасираном, са мање опција.

На самом почетку космоса, у време наводног Великог праска (пре 13,8 милијарди година), поменути развој дешавао се у делићима секунде (са нашег становишта), у количинама промена које би нама данас изгледале као милиони, а касније као милијарде година.

П: Зашто мислиш да би пораст извесности требао успоравати?

О: Због успоравања тока времена. Када је све мање неизвесности, мањег је обима случајност, а опажена количина случајних догађаја дефинише протицање времена.

---

[46] Детаљ и једне шире дискусије, овде небитне.
[47] https://www.sciencealert.com/our-universe-s-earliest-state-of-matter-was-like-an-ocean-of-perfect-liquid

П: Како то да ми не опажамо сопствено успоравање времена?

О: То је ствар мерне јединице. Са смањењем пројекције и одговарајућег смањења јединице мерења, из истих односа удаљености на карти уследиће исте измерене вредности.

П: Ако су сами закони променљиви како их је онда могуће сматрати тачнима?

О: Те промене су безнадежно споре за нас. На вреди укључивати у рачун физике такво нешто што се не да физички мерити. Теза „теорије информације“ је да се у космичким размерама (током милијарди година) закони физике мењају, а коју ако игноришемо нећемо грешити.

Светлост је била бржа и биће све спорија, писао сам недавно[48], а то ће бити мерљиво (још увек је у сфери фантазије) и многи ће покушавати заобилазити ту констатацију све док теоријске нетачности буду подношљиве. Нема потребе да се озбиљни физичари олако и на пречац одлуче на „принципијелну неизвесност“, да одбаце каузалност.

Тако се, на пример, одвајање (настанак) електромагнетне силе из некадашње заједничке „електро-слабе“ цепањем на две, десило у раном периоду васионе, али каузалне теорије још увек могу да „држе воду“ и ту појаву настајања нових сила можемо „разумевати“ класично. Шире гледано, тезу о променљивим законим потврђује и недавни налаз о стању материје раног универзума (најраније стање нашег универзума било је попут океана савршене течности).

П: Шта би био твој „доказ“ да би се закони физике морали мењати?

О: Настајати више него само мењати, било би тачније рећи. Поновићу, садашњост се развија ка вероватнијим стањима, што значи информативнијим (принцип минимализма информације), а у преводу више озакоњеним, усмеренијим, крућима. Вишак закона је мањак неизвесности, мањак дејства и уопште онога што бисмо у ширем смислу називали агресивношћу.

***

Питање: Како то да због „принципијелног минимализма информације“ не долази до урушавања свих физичких система у стања без информација, или барем у стања велике извесности?

Одговор: Пре свега, због закона одржања информације. Космос се „топи“ тако да је све мање информације супстанце, а све више ње у простору, при чему је укупни збир константан. Тај је процес је таман толико брз колико је вероватнији прелазак фермиона у бозоне него обрнуто и све је спорији, јер је све мање оних првих.

То је упоредиво са олујама које настају упркос принципа најмањег дејства, иначе свеобухватног и несумњивог за физику, или гејзира и вулкана у присуству универзалног гравитационог привлачења. Када су мање температурне разлике унутрашњости и околине планете, или осунчаности њених страна, мањи су и мање учестали њени ветрови. Када величином планете

[48] https://www.academia.edu/49072314/Speed_of_light

њена гравитациона сила надвладава њене унутрашње тектонске притиске, тада њене планине постају мање и сразмерно ниже у односу на њен пречник.

***

Питање: Како браниш тезу да „природа не воли једнакост“?

Одговор: Неверницима? Тешко, заправо и не трудим се. У друштвеним круговима данас би то било непопуларно, лудост би била и покушавати.

Са друге стране, у микросвету физике, већ постоји „Паулијев принцип забране“ где у квантном свету честица, иначе свету случајности, речена теза није само питање вољења или настојања, већ изричити захтев. У истом квантном систему не могу бити два иста квантна подсистема. Не могу бити два иста електрона у истом атому – из чега следи, на пример, периодни систем хемијских елемената.

У макросвету те различитости замагљује закон великих бројева и ко неће да их види не губи много, јер су оне свугде у „малим порцијама“. Исто је са (суптилним) математичким законитостима које се заправо своде на те различитости и многострукости.

Од мене има довољно писања о томе. Информација је ткиво космоса, а неизвесност је њена суштина, па су раслојавања увек већа него што очекујемо. Изненађења и тако сићушна у нашој свакодневници могу нас затећи својим значајем, као и развој догађаја детерминистичке теорије хаоса (попут махања крила лептира у Мексику које може изазвати олују у Тексасу).

П: Дај ми нешто конкретно, када већ кажеш да си писао о томе, да имаш примера?

О: Досадно је то понављати, али ако. Једнаке опције носе већу информацију од различито вероватних (познато и Шенону, 1948). Додај томе (моје) да природа спонтано тежи мање информативним стањима (принцип минимализма информације) и следи да ће она спонтано избегавати једнакости.

П: Ако се не разумем у те апстракције, имаш ли нешто конкретно?

О: Такмичаре стављамо у равноправне почетне позиције очекујући занимљивију, а то значи живљу борбу. Природа ствари помаже им у томе управо због закона информације: више информативно је више живахно, више агресивно, више нежељено. Једнакост генерише сукобе – тако ми, који себе називамо „живим светом“ мислимо, а заправо – природни ток ствари је ка раслојавању и посебностима, дакле ка неједнакости.

***

Питање: Правни системи (судови) су нам загушени процесима. Имаш ли неки предлог, решење?

Одговор: То није само наш проблем, нити је тренутни, што потврђује и овај прилог из 1959. године[49]. Није моје да се бавим решењима правних тешкоћа, али могу понешто рећи о њиховим узроцима. Корен преоптерећености правних система је принцип минимализма информације – којег разумевање би могло помоћи и у решавању, надам се.

Правни системи настоје поправити равноправност грађана, радећи несвесно на повећању виталности (информације) друштва, али против њих стоје спонтани (многи непознати) природни процеси отпора.

***

Питање: Ок ми је та развојност која би да физичка стања води у мање информативна и боље уређена, али зар она неће заглавити у циклусима, који су такође свуда око нас?

Одговор: Хоће, али недовољно. Начелна непредвидљивост супротстстављена је сталном понављању истога, а ова против себе има закон одржања информације.

Хипотезу о таласној природи сваког вида материје било је могуће поставити након открића Фуријеових[50] редова, али то се тада није десило. Она је установљена тек од стране Де Броја (1924), а затим искориштена за формирање Шредингерове једначине (1926), након којих је сматрамо несумњивом истином физике. Даље, информацију носи свако таласање материје, али и обрнуто, свака таласна појава нека је информација.

Да су цикличне појаве добар пут у чувању информације демонстрира једно иначе познато тумачење магичних квадрата[51]. У овом (типа 3 × 3) на слици, бројеви од 1 до 9 распоређени су у девет поља квадрата тако је је збир у сваком од три ретка, у свакој од три колоне и дуж обе дијагонале 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

[49] https://www.jstor.org/stable/25721027?seq=1
[50] Joseph Fourier (1768—1830), француски математичар и физичар.
[51] [9], слика 2.5: Магични квадрат 3 × 3.

Нека су у колонама представљени освојени бодови на неком такмичењу између тимова A, B и C. Тимови имају по три играча. Тако је први играч прве екипе (A) од првог играча друге екипе (B) изгубио резултатом 4:9. Изгубио је и други играч 3:5, па иако је трећи убедљиво победио 8:1, прва екипа је изгубила од друге резултатом A:B = 1:2. Остали резултати су B:C = 1:2 и C:A = 1:2.

Први тим губи од другог, други губи од трећег, трећи губи од првог! Тај модел интерпретиран даје могућност сталног постепеног напредовања а да је резултат, шире гледано, стално врћење у истом кругу. То би ишло у прилог закону одржања (информације), али се неће заиста десити због начела непредвидљивости (информације).

Наиме, чак и талас-честица светлости (фотон) која нам долази из далеких галаксија мења своју фреквенцију због Долеровог ефекта. Али она никада није била у истој средини, јер се свемир стално мења, па шире гледано ни она није стално иста.

Другачији пример периодичности била би смена угљен диоксида и кисеоника на земљи. Када је више првога буја биљни свет и производи више другога, а тиме се провоцира обрнуто, да се јавља вишак потрошача кисеоника у виду животиња, пожара и других појаве које користе прилику. Међутим, космичке појаве ће пре или касније покварити ово стање равнотеже и прекинути његову цикличност.

Пример периодичности стварају и рибарске мреже које на Тихом океану могу бити дуге стотинама километара. Рибарски бродови знају их остављати и губити, а њих одвући морске струје. Дешава се да се у такве напуштене мреже запетљају делфини који тада умиру без могућности да дишу, а њихова тежина повуче мрежу на дно океана. Доле на дну њихова тела се распадају и бивају поједена, па се мрежа ослобађа и поново испливава на површину. Тако настају циклуси спуштања и дизања тих огромних мрежа, све док се и оне саме не распадну.

Дакле, цикличне појаве могу чувати количину (информације), а можда их због закона одржања има толико много око нас, али и такво чување углавном је привремено. Са друге стране, није сва природа само у стањима равнотеже, као што нису све њене силе само привлачне.

***

Питање: Постоји ли нека општа препорука за добру стратегију?

Одговор: Ако мислиш на теорију игара, можда би то била „минимакс“ стратегија: минимизирај потенцијални губитак у најгорем случају, разматрај тако да из противникових најбољих потеза имаш што већи добитак.

П: Чуо сам за то (Нојман, 1928), знам нешто о теорији игара, али мислио сам на твоју теорију информације, има ли тамо нешто о добрим стратегијама?

О: Да, а тамо би то била „виталност“. Теорија „информације перцепције“ још увек је хипотетичка, спекулативна, али мислим да постоји једна важна њена последица која се може сматрати

провереном. Нема доброг назива, па је рецимо приближно назовимо „бушидо“ концептом: јако са јаким а слабо са слабим.

П: Откуда то?

О: Из форме информације перцепције ($S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$) где први фактори сабирака (a-низ) представљају „снагу“ иницијативе првог играча против одговарајућих других (b-низ). Најбољи скор (S) добијеш када на јаке потезе противника одговараш јакима а на слабе слабима.

П: Како долазиш до тог описа, препоруке (јако са јаким слабо са слабим)?

О: То је теорема и наизглед нема везе са интуицијом. На пример, низ (3,2,1) множен са (3,2,1) даће 9 + 4 + 1 = 14, а низ (1,2,3) даће 3 + 4 + 3 = 10. Ова се препорука показује „изненађујуће“ тачна у компјутерским симулацијама надигравања разних стратегија. Наравно, те компјутерске „игре“ не одржавају се због моје теорије већ због проучавања теорије игара, па су утолико значајније за информацију перцепције. Теорији информације ови резултати нису изненађење.

П: Користиш ли то негде у свакодневном животу?

О: Па и не баш, али виђам свукуда. На пример, у политици. Западни империјалисти иду најјаче на најјаче племе (Србе), а слабе као да готиве, желећи ту област потчинити. То је добра стратегија за доминацију.

Литература

[1] Растко Вуковић: *ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ ИНФОРМАЦИЈЕ II* – Од маја 2021. до даљњег (Економски институт Бања Лука, у припреми, 2021). https://www.scribd.com/document/493741600/Prilozi-II

[2] Растко Вуковић: *ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ ИНФОРМАЦИЈЕ* – Од октобра 2020. до јануара 2021. (Економски институт Бања Лука, на чекању, 2021.) https://archive.org/details/prilozi-teoriji-informacije

[3] Растко Вуковић: *ДЕЈСТВО ИНФОРМАЦИЈЕ* – енергија, време и комуникација. Економски институт Бања Лука, 2021. https://www.scribd.com/document/440746867/Dejstvo-informacije

[4] Растко Вуковић: *МИМИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ* – физичка информација и примене. Економски институт Бања Лука, 2020. https://www.scribd.com/document/421087302/Minimalizam-informacije

[5] Растко Вуковић: *ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА* – у друштвеним појавама и математици. Економски Институт Бања Лука, 2019. https://www.scribd.com/document/406574702/Fizi%C4%8Dka-Informacija

[6] Daniel Jost Brod: *Bosons vs. Fermions* – A computational complexity perspective. Revista Brasileira de Ensino de F´ýsica, vol. 43, suppl. 1, e20200403 (2021). https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172021000500217&script=sci_arttext

[7] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума (метричког и векторског простора). На чекању, 2018. https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika

[8] Растко Вуковић: *ПРОСТОР-ВРЕМЕ* – принципи физике случајности. Економски институт Бања Лука, 2017. https://www.scribd.com/document/347514158/Principi

[9] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* – слобода, демократија и физика; Економски институт Бања Лука, 2016. https://archive.org/details/Informacija/Informacija/